

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG): é um caso especial de sequência, onde o **quociente** entre cada termo e o seu antecessor é sempre igual. Esse termo constante é chamado de **razão** da PG, que é representado pela letra **q**, para diferenciar da razão r da PA. Então podemos dizer que Progressão Geométrica PG, é uma sucessão de números onde, a partir do 2º termo, cada termo é igual ao anterior multiplicado pela razão da PG.

O **Termo Geral** da PG, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde: a_n = último termo da PG ou termo procurado;

a_1 = primeiro termo da PG;

n = número de elementos da PG;

q = razão da PG.

Podemos estender a definição do termo geral para:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \quad a_9 = a_5 \cdot q^4$$

Exemplos:

1) Obtenha o 10º termo da P.G. (1, 2, 4, ...)

Aplicando a fórmula, temos que $a_{10} = 512$

2) Obtenha o 100º termo da P.G. (2, 6, 18, ...)

Aplicando a fórmula, temos que $a_{100} = 2 \cdot 3^{99}$

3) Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é 1/2 e a razão também é 1/2, qual é o primeiro termo dessa progressão?

Aplicando a fórmula, temos que $a_1 = 64$

4) Determine a quantidade de termos da PG de razão 2, $a_1 = 3$ e $a_n = 768$.

Aplicando a fórmula, temos que $n = 9$

5) Calcule a razão da PG na qual, $a_1 = 1$ e $a_6 = 1024$.

Aplicando a fórmula, temos que $q = 4$

6) Calcule a razão da PG na qual, $a_2 = 6$ e $a_5 = 162$.

Aplicando a fórmula, temos que $q = 3$

Exercícios da aula:

1) Obtenha o 6º termo da P.G. (2, 8, 32, ...)

2) Obtenha o 7º termo da P.G. (1, 3, 9, ...)

3) Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é 640 e a razão é 2, qual é o primeiro termo dessa progressão?

4) Determine a quantidade de termos da PG de razão 3, $a_1 = 7$ e $a_n = 1701$.

5) Calcule a razão da PG na qual, $a_1 = 81$ e $a_7 = 1/9$.

6) Calcule a razão da PG na qual, $a_2 = 12$ e $a_5 = 768$.

7) Escreva uma PG, inserindo 5 meios geométricos positivos entre 1 e 64, nessa ordem.

Respostas: 1)2.048 2)729 3)5 4)6 5)1/3 6)4 7)(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)

A **Soma dos n termos da PG finita**, é dado pelas fórmulas abaixo:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

Onde: S_n = soma dos termos de uma PG;

a_1 = primeiro termo da soma;

a_n = último termo da soma;

n = quantidade de termos da soma;

q = razão da PG.

Exemplo: obtenha a soma dos dez primeiros termos da P.G. (1, 2, 4, ...)

Aplicando a fórmula, temos que **$S_{10} = 1023$**

Exercícios da aula:

1) Obtenha a soma dos seis primeiros termos da P.G. (2, 6, 18, ...)

2) Dê a soma dos termos da seguinte PG (7, 14, 28, ... , 3584)

3) Um tipo de bactéria divide-se em duas a cada hora, formando a PG (1, 2, 4, ...). Após 12 horas, qual será o total de bactérias?

Respostas: 1)728 2)7161 3)4095

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA E DECRESCENTE: a soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão q , com $-1 < q < 1$, existe e é dado por:

$$S \cong \frac{a_1}{1 - q}$$

Onde: S = soma dos infinitos termos de uma PG decrescente;

a_1 = primeiro termo da PG;

q = razão da PG.

A Soma de parcelas sucessivas de uma sequência infinita sem que essa operação termine após um número finito de parcelas, é chamada de série convergente, embora a soma nunca chegue exatamente ao valor do resultado, tende a ele.

Exemplo: calcule a soma dos termos da PG (1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ...)

Aplicando a fórmula acima, temos que **$S \cong 2$**

Exercícios da aula:

1) Calcule a soma dos termos da PG (2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ...)

2) Determine o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ...

3) Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 0,444...

Dica: $0,444 \dots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots$ Logo, a sequência (0,4; 0,04; 0,004; ...) é uma P.G. de primeiro termo $a_1 = 0,4$ e razão $q = 0,1$.

Respostas: 1)4 2)1/2 3)4/9

PROPRIEDADE DE TRÊS TERMOS CONSECUTIVOS DE UMA P.G.: cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo antecessor e o sucessor. Ou seja, dado uma P.G. (a, b, c, ...), temos:

$$b^2 = a \cdot c$$

Exemplo: o segundo e o quarto termos de uma P.G. de razão positiva valem, respectivamente, 6 e 216. Qual é o terceiro termo dessa P.G.?

Aplicando a fórmula acima, temos que **$a_3 = 36$**

Exercícios da aula:

- 1) Calcule o valor de x na PG (4, x, 36).
- 2) Sendo x - 3, x, x + 6 três termos consecutivos de uma PG, calcule o valor de x.
- 3) Determinar x de modo que a sequência (3, x + 2, 3x) seja uma PG **crescente**.

Respostas: 1)12 2)6 3)4

PROPRIEDADE DOS TERMOS EQUIDISTANTES DE UMA P.G.: o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Na progressão geométrica (a₁, a₂, a₃, ...) temos:

$$a_1 \cdot a_9 = a_2 \cdot a_8 \text{ pois } 1 + 9 = 2 + 8$$

$$a_4 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_8 \text{ pois } 4 + 6 = 2 + 8$$

Exemplo: numa PG, temos: a₁ = 1 e a₅ = 4096, calcule a₃.

Pela propriedade, temos que a₁ · a₅ = a₃ · a₃ → **$a_3 = 64$**

Exercícios da aula: como são raros os exercícios que utilizam esta propriedade, não faremos exercícios.

PROPRIEDADE DO PRODUTO DOS TERMOS DE UMA P.G.: se P_n for o produto dos n primeiros termos da P.G. (a₁, a₂, a₃, ..., a_n, ...) então:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Exemplo: calcule o produto dos vinte primeiros termos da P.G.(1, 2, 4, 8, ...)

$$a_1 = 1 \text{ e } q = 2 \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{20} = a_1 \cdot q^{20-1} \Rightarrow a_{20} = 1 \cdot 2^{19} \Rightarrow a_{20} = 2^{19}$$

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \Rightarrow |P_{20}| = \sqrt{(a_1 \cdot a_{20})^{20}} \Rightarrow |P_{20}| = \sqrt{(1 \cdot 2^{19})^{20}} \Rightarrow |P_{20}| = (2^{19})^{10}$$

$$|P_{20}| = 2^{190}$$

Exercícios da aula: como são raros os exercícios que utilizam esta propriedade, não faremos exercícios.